Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Megoldások

1. feladat

Az $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$ egész számok összege 11. Maximálisan hány egész megoldása lehet az x ismeretlenre felírt

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10} = 1$$

egyenletnek?

Megoldás: Legyen $f(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0 - 1$, ekkor f egymástól különböző egész gyökeinek a maximális számát keressük. Ha ezek a különböző egész gyökök $c_1, \ldots, c_k$, akkor a polinom felírható $f(x) = (x - c_1)\ldots(x - c_k)g(x)$ alakban, ahol g is egész együtthatós. A feltétel szerint

$$f(1) = a_{10} + a_9 + \ldots + a_1 + a_0 - 1 = 10 = (1 - c_1)(1 - c_2)\ldots(1 - c_k)g(1),$$

tehát a 10 előáll $k+1$ egész szám szorzataként, amelyek közül az első k biztosan mind különböző. A számelmélet alaptétele miatt a 10-et előállító szorzatban az 1-nél nagyobb abszolút értékű tényezők száma legfeljebb kettő lehet. Az első k tényező között 1 és -1 mindegyike legfeljebb egyszer fordulhat elő, tehát csak $k \leq 4$ lehetséges. A $k = 4$ meg is valósulhat, legyen pl. $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = -4$ és g a konstans 1 polinom. Ekkor

$$f(x) = x(x-2)(x-3)(x+4) = x^4 - x^3 - 14x^2 + 24x,$$

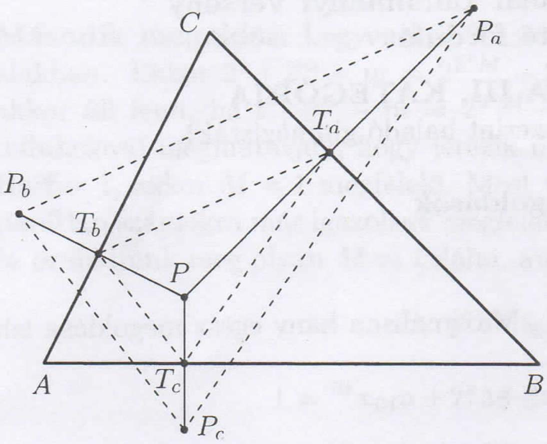
azaz $a_0 = 1$, $a_1 = 24$, $a_2 = -14$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$ és $a_5 = a_6 = \ldots = a_{10} = 0$.

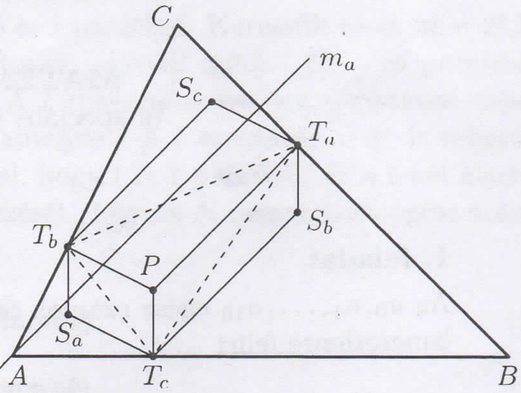
2. feladat

Egy rögzített hegyesszögű háromszög tetszőlegesen kiszemelt P belső pontját tükrözzük mindhárom oldalegyenesre. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan pont van, amely P bármely választása esetén benne van a P pont tükörképei mint csúcsok által kifeszített háromszögben.

Megoldás: Legyenek A, B, C a háromszög csúcsai, jelölje a, b, c rendre a velük szemközti oldalegyeneseket, valamint P_a, P_b, P_c a P pontnak ezekre az egyenesekre vonatkozó tükörképeit.

Először belátjuk, hogy bárhol vettük is fel a P pontot az ABC háromszög belsejében, a $P_aP_bP_c$ háromszög tartalmazza az ABC háromszög M magasságpontját. Legyen T_a, T_b és T_c a P pont merőleges vetülete rendre az a, b, illetve c oldalegyenesen. Ezek a pontok belső pontok az ABC háromszög oldalszakaszain, mert a háromszög hegyesszögű. A $T_aT_bT_c$ háromszög a P pontot a belsejében tartalmazza, és P középpontú kétszeres nagyítás viszi a $P_aP_bP_c$ háromszögbe.



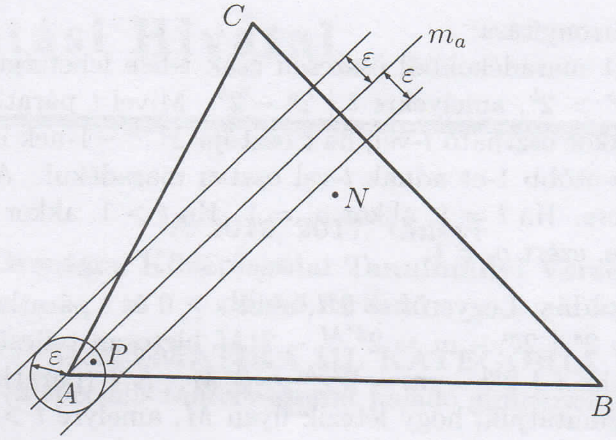


Tükrözzük a P pontot középpontosan a T_bT_c, T_cT_a, T_aT_b szakaszok felezőpontjára, így rendre az S_a, S_b, S_c pontokat kapjuk. Ezek a pontok éppen a P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b szakaszok felezőpontjai, ezért a $T_aS_cT_bS_aT_cS_b$ hatszöget lefedi a $P_aP_bP_c$ háromszög. Elég tehát megmutatnunk, hogy az M magasságpont ebben a hatszögben helyezkedik el. Látható, hogy a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak egymással, és merőlegesek az ABC háromszög egy-egy oldalára, vagyis a háromszög egy-egy magasságvonalával párhuzamosak.

Tekintsük az ABC háromszög egyik magasságegyenesét, például az A csúcson áthaladó m_a egyenest. Mivel a háromszög hegyesszögű, a B és C csúcsok, és így a T_c és T_b pontok is az m_a egyenes két különböző félsíkjában fekszenek. Húzzunk m_a-val párhuzamos egyeneseket T_c-n és T_b-n keresztül, ekkor tehát az A-ból induló magasságvonal, és így az M magasságpont is az e két egyenes által határolt sávba esik. Ugyanez elmondható a másik két magasságegyenesről is, ezért az M pont mindhárom ilyen módon származtatott sávban benne van. Ezeknek a sávoknak a közös része éppen a $T_aS_cT_bS_aT_cS_b$ hatszög, amely tehát valóban lefedi az M pontot.

Most megmutatjuk, hogy ha N az ABC háromszög síkjának M-től különböző pontja, akkor megválasztható a P pont az ABC háromszög belsejében úgy, hogy a $P_aP_bP_c$ háromszög nem fedi le N-et.

A háromszögnek biztosan van olyan magasságegyenese, amelyre az N pont nem illeszkedik, és az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy az A-n áthaladó m_a egyenes ilyen. Válasszuk az $\varepsilon > 0$ számot az N pontnak az m_a egyenestől mért távolságánál kisebbre, és válasszunk egy P pontot az ABC háromszög belsejében az A csúcshoz ε-nál közelebb. A P_b és P_c tükörképek egy-egy A-n áthaladó egyenesre való tükrözéssel származnak a P pontból, így A-tól ugyanakkora távolságban maradnak, mint P. Ezért az m_a egyenestől mért távolságuk is ε-nál kisebb. A P_a tükörkép pedig m_a és a merőlegessége folytán ugyanolyan távol marad az m_a egyenestől, mint P, ezért ez a távolság is kisebb, mint ε.



Az egész $P_aP_bP_c$ háromszög tehát benne fekszik az m_a egyenes körüli 2ε szélességű sávban, és így nem tartalmazhatja az ezen a sávon kívül fekvő N pontot.

3. feladat

Mutassuk meg, hogy minden $k > 1$ egész számhoz van olyan k^2-nél kisebb m pozitív egész, amelyre $2^m - m$ osztható k-val.

Első megoldás: Legyen $t > 1$ páratlan szám. Felhasználjuk, hogy a 2 hatványainak modulo t vett maradékai egy alkalmas o_t hosszúságú periódus szerint ismétlődnek, azaz $2^a - 2^b$ akkor és csak akkor osztható t-vel, ha $a - b$ osztható o_t-vel, továbbá hogy $o_t < t$. Ennek a bizonyítása a megoldás végén olvasható.

Legyen a_n az iterált 2-hatványok sorozata, vagyis $a_0 = 1$ és $n \geq 0$ esetén $a_{n+1} = 2^{a_n}$. A $2^n \geq n + 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy $a_{n+1} = 2^{a_n} \geq a_n + 1$, ahonnan n szerinti indukcióval világos, hogy $a_n \geq n + 1$. Ezért $a_{n+1} = 2^{a_n}$ osztható 2^{n+1}-nel minden $n \geq 0$ egészre.

Segédállításként megmutatjuk, hogy $1 \leq r \leq n$ esetén r osztója $a_{n+1} - a_n$-nek. Ez teljesül $n = 1$-re, tegyük fel hogy igaz $n - 1$-re. Írjuk az $1 \leq r \leq n$ számot $r = 2^s t$ alakban, ahol t páratlan. Ekkor 2^s osztója a_n-nek és a_{n+1}-nek is, hiszen ezek 2^n-nel is oszthatók, és $2^s \leq r \leq n \leq 2^n$. Ezért elég belátni, hogy $t \mid a_{n+1} - a_n$. Ez nyilvánvaló ha $t = 1$, egyébként pedig $o_t < t \leq r \leq n$, ezért $o_t \leq n - 1$, és így az indukciós feltevés miatt $o_t \mid a_n - a_{n-1}$. A periodicitás azt jelenti, hogy $t \mid 2^{a_n} - 2^{a_{n-1}} = a_{n+1} - a_n$, ami a segédállítást igazolja.

Most rátérünk a feladat állításának igazolására. Ha $k = 2^s$, ahol $s \geq 1$, akkor $m = k$ nyilván megfelelő, hiszen $k = 2^s \geq s$ miatt $k = 2^s \mid 2^k$. Legyen $k = 2^s t$, ahol $t > 1$ páratlan szám. A segédállítás szerint $k \mid a_{k+1} - a_k = 2^{a_k} - a_k$. Legyen m az a_k maradéka ko_t-vel osztva. Belátjuk, hogy az így kapott m szám megfelel a feladat feltételeinek. Nem lehet $m = 0$, mert akkor $ko_t \mid a_k$ miatt k is 2-hatvány lenne. Nyilván $m < ko_t < kt \leq k^2$. Mivel

$$(2^{a_k} - a_k) - (2^m - m) = (2^{a_k} - 2^m) - (a_k - m)\,,$$

elég igazolni, hogy a jobb oldalon mindkét különbség osztható k-val. Az m választása miatt $k \mid a_k - m$ és $o_t \mid a_k - m$, ahonnan a periodicitás miatt $t \mid 2^{a_k} - 2^m$ következik. Végül $a_{k-1} \geq k \geq 2^s$, ezért $a_k = 2^{a_{k-1}}$ és 2^{a_k} osztható 2^s-sel. Így $k \mid a_k - m$ miatt $2^s \mid m$. Tehát $2^s \mid 2^{a_k} - 2^m$.

A periodicitás bizonyítása:

A modulo t vett maradékokból összesen csak t-féle lehetséges, van tehát két különböző kettőhatvány, $2^a > 2^b$, amelyekre $t \mid 2^a - 2^b$. Mivel t páratlan, $2^a - 2^b = (2^{a-b} - 1)2^b$ akkor és csak akkor osztható t-vel, ha t osztója $2^{a-b} - 1$-nek is. Ezért a 2 pozitív kitevőjű hatványai előbb-utóbb 1-et adnak t-vel osztva maradékul. Az o_t szám a legkisebb ilyen pozitív kitevő lesz. Ha $t = 1$, akkor $o_t = 1$. Ha $t > 1$, akkor a periódusban a 0 maradék nem lehet benne, ezért $o_t < t$.

Második megoldás: Legyen $k = 2^s t$, ahol $s \geq 0$ és t páratlan. Keressük m-et $m = 2^s M$ alakban. Ekkor $2^s \mid 2^m - m = 2^{2^s M} - 2^s M$ biztosan teljesül, így $k \mid 2^m - m$ pontosan akkor áll fenn, ha $t \mid 2^m - m = 2^{2^s M} - 2^s M$. A t (páratlan) számra vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy létezik ilyen M, amelyre $t > 1$ esetén $M < t^2$ is teljesül. Ha $t = 1$, akkor $M = 1$ megfelelő. Most tegyük fel, hogy $t > 1$ páratlan, és a t-nél kisebb páratlan számokra már igazoltuk megfelelő M létezését. Legyen N nemnegatív egész szám, és próbáljunk meg olyan M-et találni, amelyre a

$$2^{2^s M} \equiv 2^{2^s N} \pmod{t} \tag{1}$$

$$2^s M \equiv 2^{2^s N} \pmod{t} \tag{2}$$

kongruenciák egyaránt teljesülnek. Mivel t páratlan szám, az Euler–Fermat-tétel szerint $2^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod{t}$, és így

$$M \equiv N \pmod{\varphi(t)} \tag{1'}$$

esetén az (1) kongruencia biztosan teljesül. A (2) kongruencia pedig nyilván ekvivalens az

$$M \equiv 2^{2^s N - s} \pmod{t} \tag{2'}$$

kongruenciával. Az (1′)-(2′) kongruenciarendszernek pontosan akkor létezik megoldása[1], ha $(t, \varphi(t)) \mid 2^{2^s N - s} - N$, ami t páratlansága miatt ekvivalens a

$$2^{2^s N} \equiv 2^s N \pmod{(t, \varphi(t))}$$

kongruenciával. Mivel $(t, \varphi(t))$ egy t-nél kisebb páratlan szám, ezért az indukciós feltevés alapján létezik ilyen N. Ilyen N választása mellett az (1′)-(2′) kongruenciarendszernek van megoldása, és mivel a kongruenciák teljesülését az M szám modulo $[t, \varphi(t)]$ vett maradéka meghatározza, ezért választhatunk olyan $M \leq [t, \varphi(t)] \leq t\varphi(t) < t^2$ pozitív egész számot, amelyre teljesül (1′) és (2′), így következésképpen (1) és (2) is. Ezzel az állításunkat igazoltuk.

Ha $t > 1$, akkor az így kapott m-re $k \mid 2^m - m$ és $m = 2^s M < 2^s t^2 \leq k^2$ is teljesül. Ha $t = 1$, de $s > 0$, akkor $m = 2^s < 2^{2s} = k^2$.

[1] Freud–Gyarmati: Számelmélet 2.6.1 Tétel szerint az

$$x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

kongruenciarendszer pontosan akkor oldható meg, ha $(m_1, m_2) \mid c_1 - c_2$.