Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2020

2020/1. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, az A, B és C-ből induló magasságok talppontjai legyenek rendre D, E, F. Legyen k_b és k_c a BDF és CDE háromszögek beírt köre, ezek érintsék a DF és DE szakaszokat rendre az M és N pontokban. Az MN egyenesnek a k_b és k_c körökkel vett másik metszéspontja rendre P és Q. Igazoljuk, hogy $MP = NQ$.

2020/2. Legyen $n \geq 3$ egész és $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pozitív valósak szigorúan monoton növő sorozata, melyek összege 2. Legyen X az $\{1, 2, ..., n\}$ olyan részhalmaza, amelyre $|1 - \sum_{i \in X} a_i|$ minimális. Bizonyítsuk be, hogy létezik pozitív valósak $(b_1, b_2, ..., b_n)$ szigorúan monoton növekedő 2 összegű olyan n elemű sorozata, amelyre $\sum_{i \in X} b_i = 1$.

2020/3. Legyen $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egészek halmaza, C pedig adott pozitív egész. Határozzuk meg a következő tulajdonságú $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ függvényeket: minden olyan pozitív egész a és b esetén, amelyekre $a + b > C$,

$$a + f(b) \mid a^2 + bf(a).$$

2020/4. Legyen $a_0, a_1, a_2, ...$ nem feltétlenül különböző egészek végtelen sorozata, melyre $0 \leq a_i \leq i$ minden nemnegatív egész i esetén és

$$\binom{k}{a_0} + \binom{k}{a_1} + ... + \binom{k}{a_k} = 2^k$$

minden nemnegatív egész k esetén. Bizonyítsuk be, hogy minden nemnegatív egész N szerepel a sorozatban, azaz van olyan $j \geq 0$, amelyre $a_j = N$.

2020/5. Legyen $n \geq 2$ pozitív egész, $a_1, a_2, ..., a_n$ valós számok, összegük 0. Tekintsük a következő halmazt:

$$H = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, |a_i - a_j| \geq 1\}.$$

Igazoljuk, hogy amennyiben H nem üres halmaz, akkor

$$\sum_{(i,j) \in H} a_i a_j < 0.$$

2020/6. Legyen a pozitív egész szám. Nevezzük a b pozitív egész számot a-*jó*nak, ha $\binom{an}{b} - 1$ osztható $(an + 1)$-gyel minden olyan pozitív egész n számra, amelyre $an \geq b$. Tegyük fel, hogy b a-jó, de $b + 2$ nem a-jó. Igazoljuk, hogy $b + 1$ prím.

2020/7. Legyenek $x_1, x_2, ..., x_n$ valós számok, összegük 0, négyzeteik összege 1. Legyen

$$a = \min(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \text{és} \quad b = \max(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Igazoljuk, hogy

$$ab \leq -\frac{1}{n}.$$

2020/8. Egész számok egy S halmazát nevezzük *gyökteljes*nek, ha bármely pozitív egész n és bármely $a_0, a_1, ..., a_n \in S$ esetén az $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ polinom minden egész gyöke eleme S-nek (az $a_0, a_1, ..., a_n$ számok nem feltétlenül különbözőek, de nem mind nullák). Határozzuk meg az összes olyan, egész számokból álló gyökteljes halmazt, amely minden pozitív egész a és b esetén tartalmazza a $2^a - 2^b$ számot.

2020/9. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $CD = DE$ és $EDC\angle \neq 2 \cdot ADB\angle$. Tegyük fel, hogy az ötszög belső P pontjára $AP = AE$ és $BP = BC$ teljesül.

Mutassuk meg, hogy P akkor és csak akkor illeszkedik a CE átlóra, ha $T(BCD) + T(ADE) = T(ABD) + T(ABP)$, ahol $T(XYZ)$ az XYZ háromszög területét jelöli.