Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2019

2019/1. Egy országban 100 repülőtér van. Képzeljük el, hogy kezdetben nincs köztük légiforgalom és két társaság felváltva indíthat be járatokat. Bármely két város között csak az egyik üzemeltethet járatot és az mindkét irányban közlekedik. A közlekedési hatóság célja, hogy amennyiben valamilyen ok miatt egy repülőteret le kell zárni, akkor is el lehessen jutni, esetleg átszállásokkal, bármely két másik városból egymásba. A két légitársaság szabadon indíthat be felváltva új járatokat, de amint a cél teljesül a hatóság leállítja a folyamatot. Az utolsó járatot választó társaság a másiknak egy nagy összeget köteles fizetni, ezért ezt mindkét fél szeretné elkerülni. Ki fog fizetni, a járatindításokat kezdő, vagy a második légitársaság?

2019/2. Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I, a BC oldal felezőpontja D. Az AD súlyvonal a háromszög beírt körét E-ben és F-ben metszi. Mekkora az $EIF\angle$, ha $AC = AB + AD$?

2019/3. Legyen az n pozitív egész szám 2-nek pontosan a k-adik hatványával osztható (vagyis $n = 2^k?m$, ahol m páratlan). 2-nek pontosan hanyadik hatványával osztható az alábbi összeggel definiált tört s számlálója, ha $(s;t) = 1$?

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1} = \frac{s}{t}.$$

2019/4. A pozitív egész N számot *bájos*-nak nevezzük, ha $N = 1$ vagy N páros sok nem feltétlenül különböző prím szorzata. Pozitív egész a és b számok esetén tekintsük a $P(x) = (x + a)(x + b)$ polinomot.

(a) Igazoljuk, hogy létezik két különböző a és b szám, amelyre a $P(1)$, $P(2)$,..., $P(2019)$ számok mindegyike bájos.

(b) Mutassuk meg, hogy ha minden pozitív egész esetén $P(n)$ bájos, akkor $a = b$.

2019/5. Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontja E, körülírt körének középpontja K. Az AB és CD oldalegyenesek metszéspontja F, a BC és DA oldalegyenesek metszéspontja G. A BFC és CGD háromszögek körülírt köreinek második metszéspontja H. Igazoljuk, hogy a K, E és H pontok egy egyenesen fekszenek.

2019/6. Az 1,0,1,0,1,0,3,5,... sorozat úgy készül, hogy a hetedik tagtól kezdve mindegyik tag az előző hat tag összegének az utolsó számjegyével egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a 0,1,0,1,0,1 részsorozat egymásutáni hat tagként soha nem fordul elő a sorozatban.

2019/7. Az $ABCD$ húrtrapéznak van beírt köre, ez a kör az AC átlót E és F pontokban metszi. Az átlón a pontok sorrendje A, E, F és C. Mekkora lehet az alábbi kifejezés értéke?

$$\frac{AF \cdot EC}{AE \cdot FC}$$

2019/8. 2019 valós számra fennáll, hogy

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{2019} \geq 0, \qquad \text{valamint}$$

$$a_{674}^2 + a_{675}^2 + ... + a_{2019}^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $a_1 + a_2 + ... + a_{2019} \geq \sqrt{2019}$.

2019/9. Legyen $P(x)$ nem konstans, egész együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény, amelyre azon x egészek száma, melyekre $T^n(x) = x$ éppen $P(n)$, minden $n \geq 1$ esetén. (T^n a T függvény önmagával vett n-szeres kompozícióját jelöli, pl $T^3(x) = T(T(T(x)))$.)