Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2018

2018/1. Egy $n \times k$-as téglalapot, n és k páratlan egészek, kis téglalapokra osztottunk fel, ezeknek oldalhosszai is egészek. Bizonyítsuk be, hogy a kis téglalapok között van olyan, amelynek a nagy téglalap négy oldalától mért távolsága vagy mind páratlan vagy mind páros.

2018/2. Az ABC hegyesszögű háromszög nem egyenlőszárú, a köré írt kör középpontja O, magasságpontja M. Az OA egyenes a BM és CM egyeneseket rendre P és Q pontokban metszi. Igazoljuk, hogy a PQM háromszög köré írt kör középpontja rajta van az ABC háromszög A csúcsából induló súlyvonalán.

2018/3. . Valós számok $a_1, a_2, ...$ sorozatára igaz, hogy $n > 2017$ esetén $a_n = -\max_{i+j=n}(a_i + a_j)$. Igazoljuk, hogy a sorozat korlátos. (Azaz létezik olyan M szám, amire $|a_n| \leq M$, minden pozitív egész n-re.)

2018/4. Legyen q egy valós szám. Jakab, akinek egy cédulára tíz különöozõ valós szám van felírva, három sorban valós számokat ír egy táblára:

• Az első sorba felírja az összes $a - b$ alakú számot, ahol a és b két (nem feltétlenül különböző) szám a céduláján.

• A második sorba felírja az összes qab alakú számot, ahol a és b két (nem feltétlenül különböző) szám az első sorból.

• A harmadik sorba felírja az összes $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ alakú számot, ahol a, b, c, d négy (nem feltétlenül különböző) szám az első sorból. Határozzuk meg az összes olyan q értéket, amire bármilyen számok álljanak is Jakab céduláján, mindig igaz az, hogy minden szám, ami előfordul a második sorban, előfordul a harmadik sorban is.

2018/5. Határozzuk meg az összes olyan $n > 2$ egész számot, ami rendelkezik a következő tulajdonsággal: tetszőleges $a_1, a_2, ..., a_n$ egészekre, amelyek összege nem osztható n-nel, van olyan $1 \leq i \leq n$ index, amire az $a_i, a_i + a_{i+1}, ..., a_i + a_{i+1} + ... + a_{i+n-1}$ számok egyike sem osztható n-nel. ($i > n$ esetén $a_i = a_{i?n}$.)

2018/6. Legyen az $ABCC_1B_1A_1$ konvex hatszögben $AB = BC$, és tegyük fel, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszoknak ugyanaz a felezőmerőlegese. Legyen az AC_1 és A_1C átlók metszéspontja D, és jelöljük az ABC kört ω-val. Legyen ω-nak az A_1BC_1 körrel való másik metszéspontja $E \neq B$. Bizonyítsuk be, hogy a BB_1 és DE egyenesek ω-n metszik egymást.

2018/7. Legyen n pozitív egész szám. Nevezzünk *kaméleon*nak minden olyan, $3n$ betűből álló sorozatot, amelyben az a, b, c betűk mindegyike pontosan n-szer fordul elő. Nevezzük *cserének* egy kaméleon két szomszédos betűjének a felcserélését. Bizonyítsuk be, hogy minden X kaméleonhoz létezik olyan Y kaméleon, hogy Y-t nem lehet X-ből kiindulva $3n^2/2$-nél kevesebb cserével megkapni.

2018/8. Az ABC háromszögben legyen ω az A csúccsal szemközti hozzáírt kör. A BC, CA, AB egyeneseknek az ω körrel vett érintési pontjai legyenek rendre D, E, F. Messe a BC egyenes az AEF kört a P és Q pontokban. Legyen M az AD szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az MPQ kör érinti ω-t.

2018/9. Határozzuk meg az összes olyan, prímszámokból álló (p, q) párt ($p > q$), amire

$$\frac{(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q}-1}{(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1}$$

egész szám.