Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2017

2017/1. Határozzuk meg azon n pozitív egészeket, amelyeknek összes pozitív osztója elrendezhető egy téglalap alakú táblázatban úgy, hogy
(i) a táblázat minden mezőjébe különböző osztó kerül;
(ii) minden sorban ugyanannyi a számok összege;
(iii) minden oszlopban ugyanannyi a számok összege.

2017/2. A pozitív egész k szám jegyeinek összege legyen $S(k)$. Határozzuk meg az összes olyan egész együtthatós $P(x)$ polinomot, amelyre minden $n > 2017$ esetén $P(n) > 0$ és $S(P(n)) = P(S(n))$.

2017/3. Az ABC háromszögben $AB = AC \neq BC$, jelölje a beírt kör középpontját I. A BI egyenes AC-t D-ben metszi. A D-n áthaladó AC-re merőleges egyenes AI-t E-ben metszi. Igazoljuk, hogy I tükörképe az AC egyenesre rajta van a BDE háromszög köré írt körön.

2017/4. Határozzuk meg azt a legkisebb valós C konstanst, amire teljesül az, hogy tetszőleges a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (nem feltétlenül különböző) pozitív valós számok esetén találhatók páronként különböző i, j, k, l számok, amelyekkel

$$\left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}\right| \leqslant C$$

teljesül.

2017/5. Legyen I a nem-egyenlőszárú ABC háromszög beírt körének a középpontja, I_A az A-val szemközti oldal hozzáírt körének a középpontja, I'_A I_A tükörképe a BC egyenesre, ℓ_A pedig az AI'_A egyenes tükörképe az AI egyenesre. Hasonlóan definiáljuk az I_B, I'_B pontokat és az ℓ_B egyenest. Legyen ℓ_A és ℓ_B metszéspontja P. Bizonyítsuk be, hogy P az OI egyenesen fekszik, ahol O jelöli az ABC háromszög körülírt körének a középpontját.

2017/6. Legyen n pozitív egész szám. Határozzuk meg a legkisebb pozitív egész k számot, amire teljesül a következő: meg lehet jelölni egy $2n \times 2n$ -es táblázat k mezőjét úgy, hogy pontosan egyféleképpen lehet a táblázatot 1×2 -es és 2×1 -es dominókkal (hézagmentesen és átfedés nélkül) lefedni úgy, hogy egyetlen dominó se tartalmazzon két megjelölt mezőt.

2017/7. Legyen n egy 6-hoz relatív prím pozitív egész szám. Egy szabályos n-szög csúcsait három színnel színezzük úgy, hogy mindegyik színű csúcsból páratlan sok van. Bizonyítsuk be, hogy a csúcsokból alkotott háromszögek között van olyan, amelyik egyenlőszárú és a három csúcsa három különböző színnel van színezve.

2017/8. (a) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n számhoz van olyan $\frac{a}{b}$ tört, amelyikre a és b olyan egész számok, melyekre teljesül $0 < b \leqslant \sqrt{n} + 1$ és $\sqrt{n} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \sqrt{n+1}$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok pozitív egész n szám, amihez nincs olyan $\frac{a}{b}$ tört, amelyikre a és b olyan egész számok, melyekre teljesül $0 < b \leqslant \sqrt{n}$ és $\sqrt{n} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \sqrt{n+1}$.

2017/9. Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amire teljesül az, hogy minden m, n pozitív egészre $f(m) + f(n) - mn$ nem-nulla és osztója $(mf(m) + nf(n))$ -nek.