Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2016

2016/1. Legyenek a es b pozitív egészek, amelyekre $a!b!$ az $a!+b!$-nak többszöröse. Bizonyítsuk be, hogy $3a \geq 2b+2$.

2016/2. Pozitív valós számoknak egy $a_1, a_2, \ldots$ sorozatára teljesül

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2+k-1},$$

minden pozitív egész k esetén. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 2$-re

$$a_1+a_2++a_n \geq n.$$

2016/3. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsából az AB átfogóra bocsátott magasságvonal talppontja legyen H. A CBH háromszög egy belső D pontjára teljesül, hogy az AD szakaszt felezi CH. Legyen a BD és CH egyenesek metszéspontja P. Legyen továbbá k az a BD átmérőjű félkör, amely a CBszakaszt metszi. A k-hoz P-ből húzott érintő érintési pontja Q. Igazoljuk, hogy a CQ és AD egyenesek metszéspontja rajta van k-n.

2016/4. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, aminek a magasságpontja H. Legyen D az a pont, aminek a választásával a $HABD$ négyszög paralelogramma (ahol $AB \parallel HD$ és $AH \parallel BD$). Legyen E a DH egyenes azon pontja, amire teljesül, hogy az AC egyenes átmegy a HE szakasz felezőpontján. Legyen F az AC egyenes és a DCE háromszög körülírt körének másik metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $EF = AH$.

2016/5. Határozzuk meg az összes olyan, egész számokból álló (a, b) számpárt, amire

$$(b^2+11(a-b))^2 = a^3 \cdot b.$$

2016/6. Legyen pozitív egészek egy véges halmaza A. Nevezzük A szép kettévágásának, ha elemeit két nem üres, diszjunkt A_1, A_2 részhalmazokba osztjuk oly módon, hogy A_1 elemeinek legkisebb közös többese éppen egyenlő A_2 elemeinek legnagyobb közös osztójával. Határozzuk meg a legkisebb n számot, amelyre létezik n elemű A halmaz, amelynek pontosan 2015 szép kettévágása van.