

Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2015

2015/1. Legyen $n \geq 2$ egész és tekintsük az alábbi A_n halmazt

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n\}.$$

Határozzuk meg a legnagyobb pozitív egész számot, amely nem írható fel egy vagy több (nem feltétlenül különböző) A_n -beli elem összegeként.

2015/2. Az ABC háromszög BC , CA és AB oldalainak belső pontjai rendre K , L és M úgy, hogy az AK , BL és CM szakaszok egy ponton mennek át. Igazoljuk, hogy az ALM , BMK , CKL háromszögek közül kiválasztható kettő, amelyekbe beírt körök sugarainak összege legalább akkora, mint az ABC beírt körének sugara.

2015/3. Legyen a valós számok x_1, x_2, \dots, x_n sorozatának csúcsa

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_1 + \dots + x_i|.$$

Adott n valós szám. Alajos és Ottó szeretnék olyan sorrendbe állítani őket, hogy a sorozat csúcsa minél kisebb legyen. Alajos, az alapos, végignézi az összes lehetőséget és megtalálja a legkisebb A csúcsot adó sorozatot. Ottó, a mohó, kiválasztja x_1 -et úgy, hogy $|x_1|$ a lehető legkisebb legyen, majd kiválasztja x_2 -t a megmaradt számok közül úgy, hogy $|x_1 + x_2|$ a lehető legkisebb legyen és így tovább. Tehát az i -dik lépésben kiválasztja x_i -t a megmaradt számok közül úgy, hogy $|x_1 + x_2 + \dots + x_i|$ a lehető legkisebb legyen. Minden lépésben, ha több szám is ugyanazt az értéket adja, Ottó véletlenszerűen választ közülük. Az így kapott sorozat csúcsa M . Határozzuk meg a legkisebb olyan c állandót, amelyre teljesül, hogy minden n -re és tetszőlegesen választott n valós számra $M < cA$.

2015/4. Az ABC háromszög AB és AC oldalaira kifelé megrajzoltuk az ABD és ACE egyenlőszárú háromszögeket, ahol $DA = DB$ és $EA = EC$. Legyen a BC egyenesnek A -val átellenes oldalán az F pont olyan, amelyre

$$2\angle FBC = \angle AEC \quad \text{és} \quad 2\angle FCB = \angle ADB.$$

Legyen továbbá F merőleges vetülete BC -n T . Igazoljuk, hogy AF és DE merőlegesek, továbbá

$$\frac{AF}{DE} = \frac{2FT}{BC}.$$

2015/5. 2. Van 2^m darab papírunk, mindegyikre az 1 számot írtuk. Ezután a következő módosítást végezzük: választunk két papírt, legyenek ezeken az a és b számok. Mindkettőről letöröljük a rajtuk levő számokat és helyettük felírjuk mindkettőre az $a + b$ számot.

2015/6. Legyen $n > 1$ rögzített egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozat tagjai között végtelen sok páratlan szám van:

$$a_k = \left[\frac{n^k}{k} \right] \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$