Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2014

2014/1. Az f függvény értelmezési tartománya a pozitív egészek halmaza, a függvény minden értéke is pozitív egész. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre minden pozitív egész m és n esetén teljesül a következő oszthatóság:

$$m^2 + f(n) | mf(m) + n.$$

2014/2. Az ABC háromszögben $AC > AB$. Legyen P és Q az AC egyenes két különböző pontja, melyekre $ABP\angle = QBA\angle = ACB\angle$ és A a PC szakasz belső pontja. Tegyük fel, hogy a BQ szakaszon létezik olyan D belső pont, amelyre $PD = PB$. Az A-ból induló AD félegyenes az ABC köré írt kört az A-tól különböző R pontban metszi. Igazoljuk, hogy $QB = QR$.

2014/3. Legyen n pozitív egész, legyen továbbá pozitív egészek egy n tagú sorozata $a_1, a_2, ..., a_n$. Ezt a sorozatot periodikusan végtelenné tesszük, minden pozitív egész i-re legyen $a_{n+i} = a_i$. Ha

$$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le a_1 + n \quad \text{és} \quad a_{a_i} \le n + i - 1 \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

akkor bizonyítsuk be, hogy

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \le n^2.$$

2014/4. Igazoljuk, hogy 2000 különböző valós szám közül kiválasztható két pár $a > b$ és $c > d$ úgy, hogy $a \neq c$ vagy $b \neq d$, továbbá

$$\left| \frac{a-b}{c-d} - 1 \right| < \frac{1}{100000}.$$

2014/5. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok pozitív egész n szám létezik, amelyre n^4+n^2+1 legnagyobb prímosztója megegyezik $(n+1)^4+(n+1)^2+1$ legnagyobb prímosztójával.

2014/6. Az $ABCDEF$ konvex hatszögben

$$FAB\angle - CDE\angle = BCD\angle - EFA\angle = DEF\angle - ABC\angle$$

és $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$. Mutassuk meg, hogy az AD, BE és CF átlók egy ponton mennek át.