Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2013

2013/1. Legyen $a \geq 3$ valós szám, $P(x)$ pedig valós együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy

$$\max\{|a^k - P(k)|; k = 0, 1, 2, ..., degP + 1\} \geq 1.$$

2013/2. Az $ABCD$ húrnégyszög AC és BD átlóinak metszéspontja E. Az AD egyenes A-n túli és a BC egyenes B-n túli meghosszabbításának metszéspontja F. E tükörképe DC felezőpontjára G, E tükörképe a DA egyenesre H. Igazoljuk, hogy $DHFG$ egy körön vannak

2013/3. Egy sorozat első eleme az 1, a második eleme a 2. A sorozat minden újabb eleme a legkisebb pozitív egész, ami még korábban nem szerepelt a sorozatban és amelyik a legutolsó elemhez nem relatív prím. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész szerepel a sorozatban.

2013/4. Azt mondjuk, hogy egy n pozitív egész szám Q tulajdonságú, ha valahányszor egy a egész számra n osztója $(a^n - 1)$-nek, n^2 is osztója $(a^n - 1)$ -nek.

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden prímszám Q tulajdonságú.

(b) Mutassuk meg, hogy van végtelen sok Q tulajdonságú összetett szám.

2013/5. A hegyesszögű ABC háromszög A, B, C csúcsából induló magasságvonal talppontja legyen rendre D, E, F. Az AEF és BDF háromszög beírt körének középpontja rendre I_1 és I_2. Az ACI_1 és BCI_2 háromszög köré írt kör középpontja legyen rendre O_1 és O_2. Bizonyítsuk be, hogy I_1I_2 és O_1O_2 párhuzamosak.

2013/6. Legyenek F és G nem azonosan nulla, egész együtthatós polinomok, melyekre deg$F$ >deg$G$. Tegyük fel hogy végtelen sok p prímre a $pF + G$ polinomnak van racionális gyöke. Bizonyítsuk be, hogy F-nek van racionális gyöke.