

## Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2008

**2008/1.** Legyen  $n$  adott pozitív egész. A pozitív egészeket ki szeretnénk színezni 2 színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy teljesüljön a következő két feltétel: (i) mindkét szín végtelen sokszor szerepel, (ii) bármely  $n$  különböző piros szám összege piros és bármely  $n$  különböző kék összege kék. Van-e ilyen színezés, ha (a)  $n = 2007$ ; (b)  $n = 2008$ ?

**2008/2.** Tekintsük azon  $f : \mathbf{N}^+ \rightarrow \mathbf{N}^+$  függvényeket, amelyekre minden  $m, n \in \mathbf{N}^+$  esetén teljesül:

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1.$$

Határozzuk meg  $f(2007)$  lehetséges értékeit. ( $\mathbf{N}^+$  a pozitív egészek halmazát jelöli.)

**2008/3.** Legyen az  $ABC$  háromszög beírt körének  $BC$ -n lévő érintési pontja  $D$ . Igazoljuk, hogy az  $AD$ -re  $D$ -ben állított merőlegesnek a  $B$ , illetve  $C$  csúcsnál lévő belső szögfelező közti szakaszát  $D$  felezi.

**2008/4.** Legyenek  $b$  és  $n$  1-nél nagyobb egészek. Tegyük fel, hogy minden  $k > 1$  egész esetén van olyan  $a_k$  egész, amelyre  $b - a_k^n$  osztható  $k$ -val. Igazoljuk, hogy  $b = A^n$ , ahol  $A$  egész.

**2008/5.** Az  $ABCD$  trapéz átlóinak metszéspontja  $P$ . A  $BC$  és  $AD$  párhuzamos egyenesek közti  $Q$  pontra  $AQD\angle = CQB\angle$ , a  $CD$  egyenes elválasztja  $P$ -t és  $Q$ -t. Bizonyítsuk be, hogy  $BQP\angle = DAQ\angle$ .

**2008/6.** Legyen  $c > 2$ . Az  $a(1), a(2), \dots$  nemnegatív valós számok sorozatáról két dolgot tudunk:

(i)  $a(m+n) \leq 2a(m) + 2a(n)$  minden pozitív egész  $m, n$  esetén;

(ii)  $a(2^k) \leq \frac{1}{(k+1)^c}$  minden nemnegatív egész  $k$  esetén. Bizonyítsuk be, hogy az  $a(n)$  sorozat korlátos.