Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2005

2005/1. Bergengóciában 2005 város van. Fejletlen a csőpostahálózat, semelyik két várost nem köti össze közvetlen cső. Az új szabályok értelmében kiépíthetnek közvetlen csőkapcsolatot az A és B város között, ha létezik még két további város C és D úgy, hogy nincs közvetlen csőposta sem A és C, sem C és D, sem D és B között. Legfeljebb hány csövet építhetnek ki?

2005/2. A k kör és az l egyenes nem metszik egymást. A kör AB átmérője l-re merőleges, az átmérő végpontjai közül B van közelebb l-hez. A kör A-tól és B-től különböző pontja C. Az AC egyenes és l metszéspontja D. D-ből érintőt húzunk a körhöz, az érintési pont E. Tudjuk, hogy B és E az AC egyenesnek ugyanazon oldalán vannak. A BE egyenes és l metszéspontja F. Az AF egyenes a kört G-ben metszi. Igazoljuk, hogy az AB egyenesre tükrözve G-t a CF egyenes egy pontját kapjuk.

2005/3. Legyen p egy 2-nél nagyobb prím. A pozitív egészek a_1, a_2, ..., a_{p-2} sorozatáról tudjuk, hogy p nem osztja sem a_k-t, sem $(a_k^k - 1)$-et $(k = 1, 2, ..., p-2)$. Igazoljuk, hogy a sorozat néhány tagjának szorzata 2 maradékot ad p-vel osztva.

2005/4. A hegyesszögű ABC háromszögben $\beta > \gamma$. A köréírt kör középpontja O, az AO egyenes D-ben metszi BC-t. Az ABD és ACD háromszögek köré írt köreinek középpontjai rendre E és F. A B és C kezdőpontú BA és CA félegyeneseken van rendre G és H úgy, hogy $AG = AC$ és $AH = AB$. Igazoljuk, hogy $EFGH$ akkor és csak akkor téglalap, ha $\beta - \gamma = 60°$.

2005/5. a, b, c, d olyan nemnegatív valós számok, melyekre $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$(a + b)(c + d) \geq 2(ab + cd).$$

2005/6. Egy 2005×2005-ös táblázat elemei az $\{1, 2, ..., n\}$ halmazból valók. Az i-dik sor elemei alkotják az X_i halmazt, a j-dik oszlop elemei alkotják az Y_j halmazt. Melyik az a legkisebb n érték, melyre lehetséges, hogy az X_1, X_2, ..., X_{2005}, Y_1, Y_2, ..., Y_{2005} halmazok páronként különbözők?