Javítási útmutató

Általános irányelvek:

- teljes, jó (de hiányos) megoldás esetén 7 pontból vonogatunk le és legalább 4 pontot ér
- részmegoldás esetén a megoldás legfeljebb 4 pontot érhet
- ha valaki több úton is elindult, a különböző részmegoldásokért járó pontok nem adódnak össze

1. *Legyenek az a, b, c valós számok olyanok, hogy*

$$|a-b| \geq |c|, |b-c| \geq |a|, |c-a| \geq |b|,$$

ahol $|x|$ az x abszolútértékét jelöli. ($|x| = x$, ha $x \geq 0$ és $|x| = -x$, ha $x < 0$.) Bizonyítsd be, hogy az a, b, c számok közül az egyik a másik kettő összege.

Megoldások:

1. megoldás: (négyzetreemelés, szorzattá alakítás)

2 pont Mivel az abszolútérték nehezen kezelhető, emeljünk négyzetre! Ezt megtehetjük, hiszen az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív.

$$(a-b)^2 \geq c^2, (b-c)^2 \geq a^2, (c-a)^2 \geq b^2,$$

1 pont Rendezzünk egy oldalra, majd alakítsuk szorzattá ($x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$).

$$(a-b-c)(a-b+c) \geq 0, (b-c-a)(b-c+a) \geq 0, (c-a-b)(c-a+b) \geq 0,$$

1 pont Szorozzuk össze az összes egyenlőtlenséget! Mivel minden egyenlőtlenségben mindkét oldal nemnegatív, ezt megtehetjük és azt kapjuk, hogy

$$(a-b-c)(a-b+c)(b-c-a)(b-c+a)(c-a-b)(c-a+b) \geq 0.$$

2 pont Azonban a bal oldal nempozitív, mivel éppen

$$(-1)^3(a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2 \leq 0$$

1 pont Tehát azt kaptuk, hogy ez a kifejezés 0, azaz valamelyik tényező 0, ami azt jelenti, hogy az egyik szám a másik kettő összege.

Pontlevonások:

-1 pont ha nem írja le, hogy mindkét oldal nemnegatív, ezért emelhetjük négyzetre

-1 pont ha nem írja le, hogy mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért szorozhatjuk össze az egyenlőtlenségeket

2. megoldás: (egyben kezel mindent)

1 pont Az egyenlőtlenségrendszer szimmetrikus az a, b, c változókban, hiszen 2 változót felcserélve nem változik. Tehát feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$.

1 pont Vegyük észre, hogy $c \leq 0$, mert különben ($a \geq b \geq c > 0$) $|b-c| \geq |a|$ egyenlőtlenséből azt kapjuk, hogy $b - c \geq a$, azaz $b \geq a + c > a$, ami ellentmondás.

1 pont Tehát

$$|a| + |c| = |a| - c \geq a - c$$

2 pont

$$= (a-b) + (b-c) = |a-b| + |b-c| \geq |c| + |a|$$

1 pont Mivel az első és utolsó tag ugyanaz az egyenlőtlenség-láncban, így mindenhol egyenlőségnek kell lennie.

1 pont Tehát $a - b = |a-b| = |c| = -c \Rightarrow a + c = b$, ezzel beláttuk az állítást.

Pontlevonások:

-1 pont ha nem írja le, hogy szimmetrikus a változókban az egyenlőtlenség

-1 pont ha nem bizonyítja be, hogy $c \leq 0$, de felteszi és így megoldja

3. megoldás: (esetszétválasztós a különbségek előjele alapján)

Négy esetet vizsgálunk külön-külön, aszerint, hogy az $a-b, b-c, c-a$ közül hány negatív van. Lehet $0, 1, 2, 3$.

1 pont Az egyenlőtlenségrendszer szimmetrikus az a, b, c változókban, hiszen 2 változót felcserélve nem változik. Tehát az általánosság megszorítása nélkül eldönthetjük mi, hogy melyikek legyenek negatívak.

1 pont ha 0 negatív van közöttük: akkor $a \geq b \geq c \geq a$, azaz $a = b = c$, de visszaírva az eredeti egyenlőtlenségbe: $0 \geq |a|$, tehát $a = b = c = 0$, kész.

1 pont ha 1 negatív van közöttük, legyen $a - b < 0, b - c \geq 0, c - a \geq 0$. Ekkor $a < 0$, mert az egyenlőtlenség rendszer utolsó 2 egyenletét összeadva:

$$b - a = (b - c) + (c - a) \geq |a| + |b| \geq a + b$$

Tehát $b - c \geq -a$.

1 pont $c - a \geq |b| \geq b \geq c - a$, tehát mindenhol egyenlőség van, azaz $c = a + b$.

1 pont ha 2 negatív van közöttük, legyen $a - b \geq 0, b - c < 0, c - a < 0$. Ekkor $b < 0$, mert az egyenlőtlenség rendszer utolsó 2 egyenletét összeadva:

$$a - b = (c - b) + (a - c) \geq |a| + |b| \geq a + b$$

Tehát $a - c \geq -b$.

1 pont $c - b \geq |a| \geq a \geq c - b$, tehát mindenhol egyenlőség van, azaz $c = a + b$.

1 pont 3 negatív szám nem lehet közöttük, mert akkor $b > a > c > b$ kellene, hogy teljesüljön.

Pontlevonások, részpontok:

-1 pont ha nem írja le, hogy szimmetrikus a változókban az egyenlőtlenség

-1 pont ha nem bizonyítja be, hogy $a \leq 0$, de felteszi és így megoldja

0 pont ha felírja a 4 esetet, de egyiket sem vizsgálja

-2 pont ha a negatívok számánál kihasznál egy helytelen szimmetriát

2. *Keresd meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre nem létezik olyan (a, b, c) pozitív egész számokból álló számhármas, hogy*

$$n = \frac{a \cdot [b, c] + b \cdot [c, a] + c \cdot [a, b]}{[a, b, c]},$$

ahol $[k_1, k_2, ..., k_m]$ a $k_1, ..., k_m$ számok legkisebb közös többszörösét jelöli.

Megoldások:

1. megoldás: Azokat az n-eket keressük amelyekhez létezik (a, b, c) számhármas.

1 pont Ha $d = (a, b, c)$ akkor $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$, $c' = \frac{c}{d}$ helyettesítéssel olyan számhármast kapunk, melyre $(a', b', c') = 1$ és a viszgált kifejezés értéke d-edére csökken, így elég olyan számhármasokra megoldani a feladatot melyek legnagyob közös osztója 1, majd ezeknek venni a többszöröseit is.

2 pont $a = b = k$, $c = 1$ helyettesítéssel $n = 2k + 1$-t kapunk, így minden 1-nél nagyobb páratlan előállítható, és emiatt az első észrevétel szerint az összes nem kettőhatvány is.

2 pont Két pozitív egész szám k, m esetén $km = (k, m) \cdot [k, m]$, ahol (k, m) a számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

Legyen $x = (a, b)$, $y = (a, c)$, $z = (b, c)$. Mivel $(a, b, c) = 1$ ezért x, y, z páronként relatív prímek. Ekkor az első megállapítás miatt $a \cdot [b, c] = \frac{abc}{z}$, hasonlóan a többi is ilyen alakú, és **mivel x, y, z páronként relatív prímek**, $[a, b, c] = \frac{abc}{xyz}$, így

$$\frac{a \cdot [b, c] + b \cdot [a, c] + c \cdot [a, b]}{[a, b, c]} = xy + xz + yz$$

2 pont Kettőhatványt nem tudunk előállítani, mert ahhoz $(xy + xz + yz)$-nek kettőhatványnak kellene lennie, ám x, y, z páronként relatív prímek, így 1 vagy 0 páros van köztük, tehát $2 \nmid xy + yz + xz$ és 1-t nyilván nem kaphatunk.

Pontlevonások, részpontok:

0 pont ha minden 3-mal osztható n-re talál konstrukciót

+1 pont ha minden 1-nél nagyobb páratlanra talál konstrukciót, de nem veszi észre, hogy ezzel minden nem 2 hatványt megtalált

+3 pont ha minden nem 2-hatványra ad konstrukciót. (a fenti pontozókulcs szerinti első 1 pontot is megadom, ha mindenre talál konstrukciót).

+1-2 pont ha a kifejezést átalakítja valamilyen használhatóbb alakra (például eltünteti a nevezőt valamilyen módon)

+1 pont ha jól felírja, hogy $ab = (a, b) \cdot [a, b]$, de helytelenül általánosan írja fel, hogy

$$abc = [a, b, c] \cdot (a, b)(b, c)(c, a)$$

- 1 pont ha nem írja le az $n = 1$ esetet

2. megoldás: Azokat az n-eket keressük amelyekhez létezik (a, b, c) számhármas.

2 pont Két pozitív egész szám k, m esetén $km = (k, m) \cdot [k, m]$, ahol (k, m) a számok legnagyobb közös osztóját jelöli, továbbá minden pozitív k, ℓ, m esetén

$$[k, \ell, m] = [k, [\ell, m]] = \frac{k \cdot [\ell, m]}{(k, [\ell, m])},$$

tehát

$$\frac{a \cdot [b, c] + b \cdot [a, c] + c \cdot [a, b]}{[a, b, c]} = \frac{a \cdot [b, c]}{[a, b, c]} + \frac{b \cdot [c, a]}{[b, c, a]} + \frac{c \cdot [a, b]}{[c, a, b]} = (a, [b, c]) + (b, [c, a]) + (c, [a, b])$$

1 pont Vegyük észre, hogy a, b, c számokat ugyanazzal a d pozitív egész számmal megszorozva, a jobb oldal a d-szeresére változik, tehát ha n előáll, akkor $d \cdot n$ is előáll.

2 pont $a = b = k$, $c = 1$ helyettesítéssel $n = 2k + 1$-t kapunk, így minden 1-nél nagyobb páratlan előállítható, és emiatt az összes nem kettőhatvány is. 1 triviálisan nem áll elő.

1 pont Ha a, b, c mind páratlan, az átalakított alak jobb oldalán mind a három tag páratlan, ha pontosan 1 páros szám szerepel közöttük, akkor is, így n páratlan. Ha pontosan 1 páratlan szám szerepel közöttük, mondjuk a, akkor $(a, [b, c])$ páratlan, míg a másik kettő páros, így megint csak páratlan számot kapunk.

1 pont Ha a, b, c is páros, akkor $\frac{n}{2}$ is előállítható, $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ számokból. Ha 2^k előállítható lenne, akkor az előző pont alapján a 2 is. Azonban $n \geq 3$, mert az átalakított alak jobb oldalán mindhárom tag legalább 1, tehát ellentmondásra jutottunk.

Pontlevonások, részpontok:

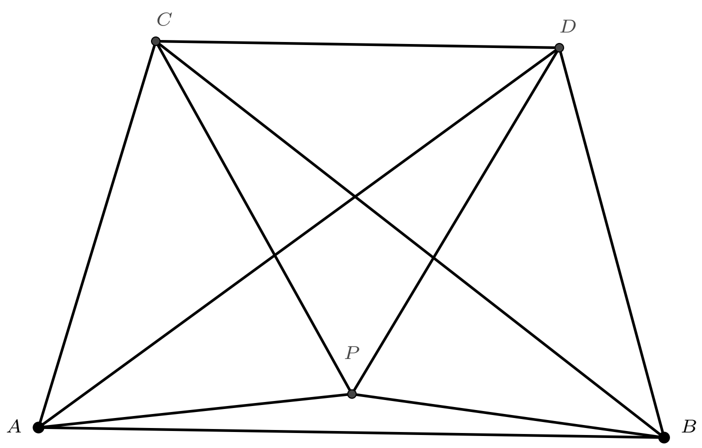
+1 pont ha más képletből belátja, hogy d-szeres is előállítható

$\leq$ **3 pont** ha csak a nem kettő hatványoknál ér el eredményt

3. *Legyen az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 2 \cdot ABC\sphericalangle$. Tegyük fel, hogy létezik egy P pont a háromszög belsejében, amelyre $AP = BP$ és $CP = AC$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $PBC\sphericalangle = 30°$.*

Megoldások:

1. megoldás:



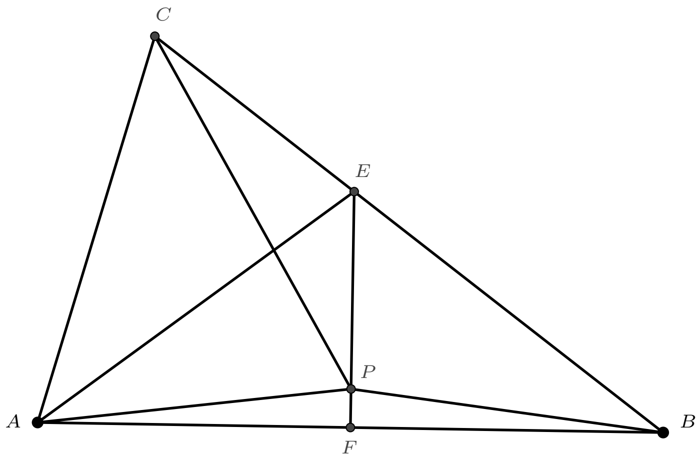
2 pont Húzzunk párhuzamost C-n keresztül az AB egyenessel. Ez a $BAC\angle$ belső szögfelezőjét a D pontban metszi. Ekkor $ABCD$ húrtrapéz, mivel egyrészt $AB \| CD$, másrészt $ABC\sphericalangle = BAC\sphericalangle/2 = BAD\sphericalangle$.

2 pont Mivel $AP = BP$, ezért P rajta van AB felezőmerőlegesén, ezzel együtt pedig a trapéz szimmetriatengelyén, tehát $CP = DP$. Legyen $\beta = ABC\sphericalangle$. Ekkor $CAD\sphericalangle = ABC\sphericalangle/2 = \beta$, továbbá $BAD\sphericalangle = ADC\sphericalangle$, mert váltó szögek, így tehát az ACD háromszög szimmetrikus, $AC = CD$. A feladat feltételei miatt $CP = AC$, ahonnan $CD = PC = PD$, tehát a PCD háromszög szabályos.

1 pont Legyen $CBP\sphericalangle = \delta$. A szimmetria miatt $DAP\sphericalangle = \delta$. A ACP háromszög szimmetrikus, innen pedig $APC\sphericalangle = CAP\sphericalangle = DAP\sphericalangle + CAD\sphericalangle = \beta + \delta$.

1 pont $ADP\sphericalangle = CDP\sphericalangle - ADC\sphericalangle = 60^\circ - \beta$ és $APD\sphericalangle = APC\sphericalangle + CPD\sphericalangle = \beta + \delta + 60^\circ$.

1 pont Ismerjük a ADP háromszög minden szögét, ezek összege 180°. Innen $APD\sphericalangle + ADP\sphericalangle + DAP\sphericalangle = (60^\circ + \delta + \beta) + (60^\circ - \beta) + \delta = 120^\circ + 2\delta = 180^\circ$. Tehát $2\delta = 60^\circ$, azaz $\delta = 30^\circ$, ezzel beláttuk a feladatot.



2. megoldás:

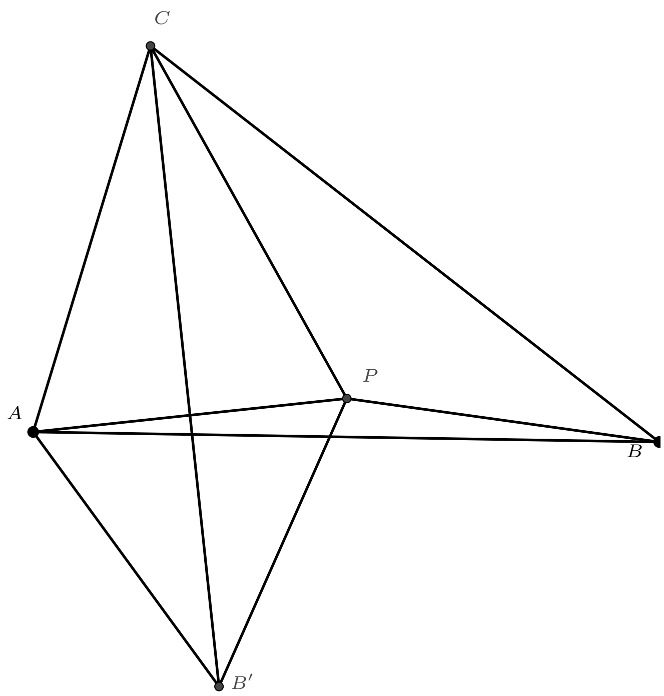
1 pont Legyen az AB oldal felezőpontja F, továbbá az A-ból induló belső szögfelező a E pontban metszi a BC oldalt. $CAE\sphericalangle = EAB\sphericalangle = ABE\sphericalangle$, tehát E rajta van az AB felezőmerőlegesén. Mivel $AP = BP$, P szintén rajta van AB felezőmerőlegesén.

1 pont Legyen $ABC\sphericalangle = \beta$ és $CBP\sphericalangle = \delta$. Szimmetria miatt $PAE = \delta$. Mivel AE szögfelező és ACP szimmetrikus, így $APC\sphericalangle = CAP\sphericalangle = \beta + \delta$.

1 pont $APF\sphericalangle = 90^\circ - FAP\sphericalangle = 90^\circ - \beta + \delta$, tehát $CPE\sphericalangle = 180^\circ - (\beta + \delta) - (90^\circ - \beta + \delta) = 90^\circ - 2\delta$.

2 pont ABC és ACE háromszögek hasonlóak, mert szögeik megegyeznek ($ACE\sphericalangle$ közös, és $ABC\sphericalangle = CAE\sphericalangle = \beta$). Így oldalaik arányára $CE/AC = AC/BC$. Mivel $AC = PC$, ezért $CE/CP = CP/BC$ is teljesül.

2 pont CEP és BCP háromszögek hasonlóak, mert 2-2 oldaluk aránya és a közbezárt szög megegyezik: $CE/CP = CP/BC$ és a C-nél lévő szögük közös. A hasonlóság miatt $CPE\sphericalangle = CBP\sphericalangle$, vagyis $90^\circ - 2\delta = \delta$, ahonnan $\delta = 30^\circ$ adódik, és ezzel beláttuk a feladatot.



3. megoldás:

1 pont Forgassuk el a CBP háromszöget C körül úgy, hogy P az A csúcsba kerüljön. Legyen B képe B'.

3 pont Legyen $ABC\sphericalangle = \beta$ és $CBP\sphericalangle = \delta$. $BAP\sphericalangle = ABP\sphericalangle = \beta - \delta$, innen $APC\sphericalangle = CAP\sphericalangle = \beta + \delta$ és $ACP\sphericalangle = 180° - 2\beta - 2\delta$. $ACB\sphericalangle = 180° - 3\beta$, így $BCP\sphericalangle = 180 - 3\beta - (180° - 2\beta - 2\delta) = 2\delta - \beta$, és $BPC\sphericalangle = 180 - \delta - (2\delta - \beta) = 180° + \beta - 3\delta$. A forgarás maitt $B'PC\sphericalangle = BPC\sphericalangle$, és $B'AP\sphericalangle = 180° + \beta - 3\delta - (\beta + \delta) = 180° - 4\delta$. A forgatás miatt $BP = B'P$, a feltételek miatt $AP = BP$ tehát $AB' = AP$. $AB'P\sphericalangle = (180° - B'AP\sphericalangle)/2 = 2\delta$. A forgatás miatt $AB'C = PBC = \delta$ azaz $CB'P\sphericalangle$ szintén δ.

1 pont A BCP és $B'CP$ háromszögek két-két oldala és a kisebbikkel szemközti szöge azonos: CP közös, $BC = B'C$, továbbá $CBP\sphericalangle = CB'P\sphericalangle = \delta$. Ekkor a két háromszög egybevágó, vagy a nagyobbikkal szemközti szögük összege 180°. (Triviális következménye a szinusz-tételnek).

2 pont Tehát $B'PC\sphericalangle = BPC\sphericalangle$ és a két háromszög egybevágó, vagy $B'PC\sphericalangle + BPC\sphericalangle = 180°$. Az utóbbi nem állhat fenn, mert $B'PC\sphericalangle + BPC\sphericalangle = B'PA\sphericalangle + APC\sphericalangle + BPC\sphericalangle = 2\delta + (\beta + \delta) + 180 + \beta - 3\delta = 180° + 2\beta > 180°$. Tehát $B'PC\sphericalangle = BPC\sphericalangle$, vagyis $2\delta + (\beta + \delta) = 180° + \beta - 3\delta$, innen pedig $6\delta = 180°$, $\delta = 30°$.

4. megoldás:

2 pont Legyen $ABC\sphericalangle = \beta$ és $CBP\sphericalangle = \delta$. $BAP\sphericalangle = ABP\sphericalangle = b - \delta$, innen $APC\sphericalangle = CAP\sphericalangle = \beta + \delta$ és $ACP\sphericalangle = 180° - 2\beta - 2\delta$. $ACB\sphericalangle = 180° - 3\beta$, így $BCP\sphericalangle = 180° - 3\beta - (180° - 2\beta - 2\delta) = 2\delta - \beta$.

1 pont Írjuk fel a szinusz-tételt az ACP és BCP háromszögekre:

$$\frac{CP}{AC} = \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin(180° - 2\beta - 2\delta)} = \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin(2(\beta+\delta))} = \frac{\sin(\beta+\delta)}{2\sin(\beta+\delta)\cos(\beta+\delta)} = \frac{1}{2\cos(\beta+\delta)}$$

$$\frac{CP}{BP} = \frac{\sin\delta}{\sin(2\delta-\beta)}$$

1 pont Mivel $AP = BP$ ezért az egyenleteket az alábbi alakban írhatjuk

$$\frac{1}{2\cos(\beta+\delta)} = \frac{\sin\delta}{\sin(2\delta-\beta)}.$$

$$\sin(2\delta-\beta) = (\sin\delta)2\cos(\beta+\delta)$$

1 pont Alkalmazva az addiciós képleteket:

$$\sin(2\delta)\cos\beta - \cos(2\delta)\sin\beta = 2\sin\delta(\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta)$$

$2\sin\delta\cos\beta\cos\delta = \sin(2\delta)\cos\beta$, és mivel $0° < \beta < 180°$, a maradékot le lehet egyszerűsíteni $-\sin\beta$-val.

$$\cos(2\delta) = 2\sin^2\delta$$

2 pont Felhasználva, hogy $\cos(2\delta) = \cos^2\delta - \sin^2\delta$, így $cos^2\delta = 3\sin^2\delta$, ahonnan $\tan^2\delta = 1/3$ (Világos, hogy $\cos\delta \neq 0°$, ezért le lehet vele osztani. Tehát $\tan\delta = \pm 1/\sqrt{3}$, aminek a $0° \leq \delta \leq 60°$ tartományon az egyetlen megoldása a $\delta = 30°$.

Pontlevonások, részpontok: -Max 2 pont a többi szög kifejezésére $ABC\sphericalangle$ és $PBC\sphericalangle$ segítségével (használhatnak helyettük más szögeket is)

4. *Legyen n pozitív egész és tekintsünk egy $(2n+1)\times(2n+1)$-es táblát, melynek néhány mezője fekete, a többi pedig fehér. Egy lépésben kiválasztunk egy tetszőleges sort vagy oszlopot, és az összes mezőjét arra a színűre festjük, amelyik szín eddig többségben volt az adott sorban/oszlopban. A kiindulási színezést fehéríthetőnek, illetve feketíthetőnek nevezzük, ha belőle véges sok, alkalmasan választott lépéssel elérhető, hogy az egész tábla fehér, illetve fekete legyen.*

   (a) *Bizonyítsd be, hogy minden színezés fehéríthető vagy feketíthető!*

   (b) *Bizonyítsd be, hogy minden n esetén létezik olyan színezés, amely fehéríthető és feketíthető is!*

   (c) *Adott n esetén mi a legkisebb olyan k, hogy minden pontosan k fekete mezőt tartalmazó színezés feketíthető?*

   (d) *Adott n esetén mi a legkisebb olyan k, hogy van olyan pontosan k fekete mezőt tartalmazó színezés, amely feketíthető?*

Megoldások:

(a) **1 pont** Minden sort átszínezve a sorok mind fehérek vagy feketék, hiszen valamelyikből több van benne az oldal páratlansága miatt. Illetve ezek a színezések nincsenek egymásra hatással. Tehát minden oszlop azonosan néz ki, azaz az összes oszlopot átszínezve (megint nincsenek hatással egymásra) a tábla vagy teljesen fekete, vagy teljesen fehér lett, legfeljebb $(2n+1)+(2n+1) = 4n+2$, azaz véges sok lépésben.

Pontlevonások, részpontok:

1 pont ha az (a) részben nem írja le, hogy és ez véges lépés, de minden oszlopot és minden sort legfeljebb egyszer színez át, ezt egyértelműen le is írja

0 pont ha nem egyértelmű, hogy hány lépést használ az (a) részben

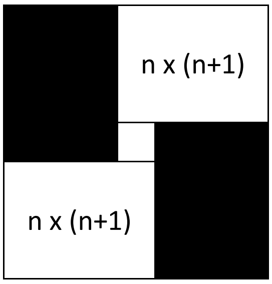
(b) **1 pont**

1. megoldás: Több konstrukció is jó lehet, le kell írni a feketítő és fehérítő eljárást is.

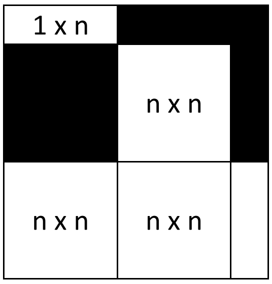
- bal felső $(n+1)\times n$-es és jobb alsó $(n+1)\times n$-es téglalapok feketék, a többi fehér. (Lásd 1. ábra.) Ez feketíthető, az $(n+1)$. oszlop kivételével a többit színezve, majd az összes sort színezve. Fehéríthető: az $(n+1)$. sor kivételével a többit színezve, majd az összes oszlopot színezve.
- 2. ábrán látható módon színezve az első $2n$ oszlopot színezve azok mind fehérek lesznek, így az első $n+1$ sort színezve a tábla fehéríthető. Az első $n+1$ sort színezve először azok feketék lesznek, így az összes oszlopot színezve a tábla feketíthető.
- többi konstrukció is végiggondolható.

2. megoldás: Bizonyítás teljes indukcióval. Indukciós feltevés: A $(2n+1)\times(2n+1)$-es táblának van olyan színezése, hogy **minden sor és oszlop egy színre való átszínezésével (tehát a sort csak akkor színezhetjük többször, ha az nem vált színt** fehéríthető és feketíthető is.

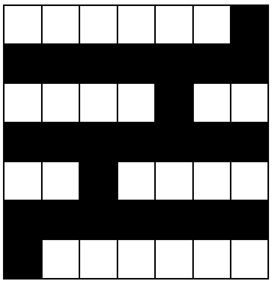
$n = 1$ esetre konstrukció, utána egy keretet kell tenni a táblára, úgy, hogy a felső sor és a bal szélső oszlop fekete legyen. Ekkor a középső négyzet $(2n-1)\times(2n-1)$ indukció miatt továbbra is fehéríthető vagy feketíthető, hiszne egy sor/oszlop **első** (illetve utána következő csak erre az első színre festő) színezését nem befolyásolja a keret, hiszen minden sorban és oszlopban pontosan egy fekete és egy fehér mező van pluszban (utána pedig csak segít). A fehérítő/feketítő eljárás a keretet is színezi, kivéve a 4 sarkot. Azonban $\mathbf{n > 1}$ **esetén** legalább 3 mező nem sarok minden oldalon, így az első és utolsó sort átszínezve a sarkok is tábla színűvé válnak.

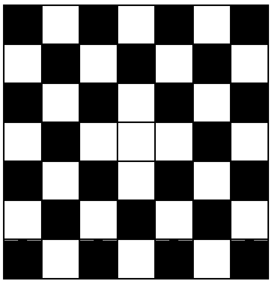


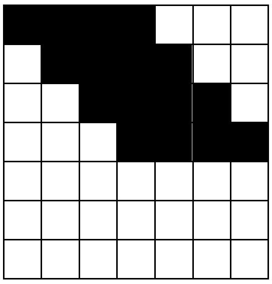
1. ábra

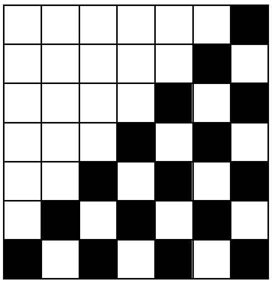


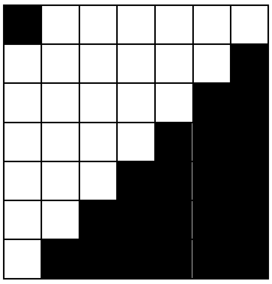
2. ábra

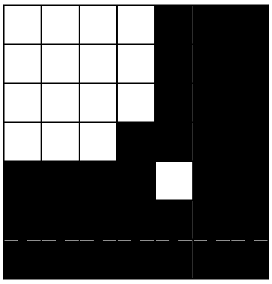

3. ábra


4. ábra


5. ábra


6. ábra


7. ábra


8. ábra

9. ábra

10. ábra

3. megoldás: Vegyük észre, hogy ha létezik olyan színezés, hogy van legalább $n+1$ sor, amiben legalább $n+1$ fekete mező van; és van legalább $n+1$ oszlop, amiben legalább $n+1$ fehér mező van, akkor az a tábla feketíthető és fehéríthető is:

feketítéshez először az összes sort színezzük át, majd az összes oszlopot, míg fehérítéshez az összes oszlopot majd összes sort.

$n = 1$-re adunk konstrukciót. Bizonyítás teljes indukcióval. Tegyük fel, hogy n-re van ilyen tábla. Ekkor Kiegészítve egy fehér és egy fekete L alakkal, akkor minden eddigi sor, amiben legalább $n+1$ fekete mező volt, most legalább $n+2$ fekete mezőt tartalmaz, illetve az utolsó sor $2n+3$ feketét tartalmaz, tehát találtunk $n+2$ sort ami legalább $n+2$ feketét tartalmaz. Hasonlóan, minden eddigi oszlop, ami legalább $n+1$ fehér mezőt tartalamzott, most legalább $n+2$ fehér mezőt tartalmaz, illetve az utolsó előtti oszlop $2n+2$ fehér mezőt tartalmaz, azaz találtunk legalább $n+2$ oszlopot, amiben legalább $n+2$ fehér mező van. Ezzel az állítást beláttuk teljes indukcióval.

Pontlevonások, részpontok:

0 pont ha csak konstrukciót ad meg, de nem írja le/rosszul írja le, hogy hogyan feketíthető és hogyan fehéríthető

0 pont ha a 2. megoldás szerinti indukcióval bizonyítja, de az indukciós feltevése nem tartalmazza, hogy minden sorhoz és oszlophoz legfeljebb egyszer nyúlunk, vagy csak azonos színre festhetjük a sorokat.

(c) **1 pont** $(2n+1)^2 - (n+1)^2 = 3n^2 + 2n$ nem elég, bármilyen jó konstrukcióval. Például ha az egyik sarokban van egy $(n+1) \times (n+1)$-es fehér négyzet, akkor az nem színezhető feketére, hiszen

1. megoldás: bármelyik nem egyszínű sort vagy oszlopot színezzük, az csak fehérre változhat, de ha egy tábla feketíthető, akkor feketíthető csak feketévé színezésekkel is. (Fehér színezések elhagyhatóak.)

2. megoldás: az $(n+1) \times (n+1)$-es négyzet sosem lesz feketíthető, egyik négyzete sem. Ugyanis ha egy lépés előtt az egész $(n+1) \times (n+1)$-es négyzet fehér, akkor minden sorában és oszlopában fehér többség van, így semelyik sora vagy oszlopa nem feketíthető, tehát minden négyzete fehér marad.

3. megoldás: a fehér négyzet egyik mezőjét sem tudjuk átszínezni, mert akkor lenne egy, amit először színezünk át feketére, de ennek a sorában és oszlopában is rajta kívül n fehér van, tehát nem tudjuk átszínezni feketre.

1 pont $(2n+1)^2 - (n+1)^1 + 1 = 3n^2 + 2n + 1$ viszont elég, mert

1. megoldás: ekkor skatulyaelv alapján lesz legalább $n+1$ sor, amiben legalább $n+1$ fekete mező van, különben $n \cdot (2n+1) + (n+1) \cdot n = 3n^2 + 2n$ fekete mező lenne csak. Ezt a legalább $n+1$ sort befeketítve az oszlopok átszínezésével az egész tábla fekete lesz.

2. megldás: Ha van legalább $n+1$ sor, amiben fekete többség van, akkor feketíthető, hiszen átszínezzük a sorokat, majd az oszlopokat. Ha nincs $n+1$ sor, amiben fekete többség van, akkor legalább $n+1$ sorban fehér többség van, tehát legalább $(n+1)^2$ fehér mező van a táblán. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb $(2n+1)^2 - (n+1)^2$ fekete mező lehetne, de ennél több fekete mezőnk van. Tehát kell lennie legalább $n+1$ sornak, amiben fekete többség van.

3. megoldás: Ha van legalább $n+1$ sor, amiben fekete többség van, akkor feketíthető, hiszen átszínezzük a sorokat, majd az oszlopokat. Tegyük fel, hogy indirekten, hogy $3n^2 + 2n + 1$ mezőnk van és nincs $n+1$ sor, amiben fekete többség van. Ekkor legfeljebb $n \cdot (2n+1) + (n+1) \cdot n$ mezőnk lehet, hiszen legfeljebb n sorban lehet $n+1$ feketénél több, a maradék $n+1$ sorban legfeljebb n fekete mező lehet. Ez azonban kevesebb, mint ami az indirekt feltevésben szerepel, ellentmondásra jutottunk.

Pontlevonások, részpontok:

0 pont Helyes végeredményért.

0 pont Konstrukció indoklás nélkül, hiányos indoklással, rossz indoklással, leggyakoribbakat kiemelve:

- Legrosszabb eset ez, ebbe belerakva még egy mezőt már lesz $n+1$ fekete sorunk.
- A tábla nem feketíthető, mert minden sora vagy oszlopa vagy teljesen fekete vagy többségben fehér.
- A tábla nem feketíthető, mert az $(n+1) \times (n+1)$-es fehér tábla egyik mezőjét sem tudjuk feketére színezni.

0 pont Ha valaki a d) rész segítségével indokolta, de a d) részre adott megoldása nem ér legalább 2 pontot.

(d) **0 pont** Konstrukció $(n+1)^2$ mezőre: egy $(n+1)\times(n+1)$-es fekete négyzet az a) részben leírtak szerint feketíthető.

3 pont

1. megoldás: (színezett sorok vizsgálata)

Ha egy tábla feketíthető, akkor minden sort/oszlopot elég legfeljebb egyszer átszínezni.

- Ha egy oszlop színezése előtt $s < n+1$ sort kiszíneztünk már feketére, akkor az oszlop feketére színezéséhez legalább $n+1-s$ eredetileg is fekete mezőt kell használni, amit korábban még nem használtunk. Hasonlóan, ha egy sor feketére színezése előtt $\ell < n+1$ oszlopot kiszíneztünk már feketére, akkor a sor feketére színezéséhez legalább $n+1-\ell$ eredetileg is fekete mezőt kell használni, amit korábban még nem használtunk.
- Vizsgáljuk meg, hogy a tábla teljes kifeketítéséhez hány feketére van szükségünk. Párosítsunk a lépésekhez fekete mezőket, hogy minden kezdetben fekete mező egyértelműen tartozzon egy lépéshez!
- Amennyiben van $(n+1)$ fekete sorunk/oszlopunk, a tábla feketíthető, tehát abbahagyhatjuk a színezés megfigyelését, innentől kezdve biztosan nem kell az eredetileg feketékből használnunk, amit még ne használtunk volna. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy sorból lesz előbb $n+1$, eddig k db oszlopot színeztünk ki feketére.
- Ha egy oszlop előtt $m < n+1$ sort színeztünk ki feketére, akkor az oszlophoz legalább $n+1-m$ eredeti és még nem használt fekete mező kell. Azonban ez az oszlop $1-1$ fekete mezőt biztosít a további $n+1-m$ sorhoz (tehát ezek eggyel kevesebb eredeti feketét igyénelnek), amit ez az oszlop feketítése után színezünk feketére. Tehát az oszlop fekete mezőit kivéve és $1-1$ mezőt az átszínezendő maradék $n+1-m$ sorba betéve nem változik a kezdetben szükséges fekete mezők száma, csak a színezésből kihagyjuk az oszlopokat.
- Tehát tetszőleges színezési sorrend esetén ha a minimum feketék számára egy alsó becslést ad az, ha csak sorokat szeretnénk feketére színezni. Azonban $n+1$ sor beszínezéséhez legaláb $(n+1)^2$ fekete mezőre van szükség. Ez tehát egy alsó becslés, és ilyenre konstrukciónk is van.

2. megoldás: (fehérek vizsgálása)

- A lépések során végerhajtott fehérítések elhagyhatóak, ha a tábla a végén fekete színű lesz. (Hiszen a fehérítés ellenére ugyanazon sorok feketítését végre tudjuk hajtani, a fehérítés nélkül is fekete lesz tehát a tábla.) Ha egy sort átfestünk feketére, akkor ott legalább $n+1$ fekete volt, tehát legfeljebb n új feketét hozhattunk létre.
- A következő véges sok lépést hajtjuk végre:
  - Fentről lefelé kiszínezzük a legelső sort, ami kiszínezhető feketére és még nem színeztük ki. Majd kiszínezzük a következő kiszínezhető sort, ezt addig folytatjuk, amíg már nincs kiszínezhető sor.
  - Amennyiben ilyen nincs, balról jobbra kiszínezzük az első oszlopot, ami feketére színezhető és még nem színeztük. Majd visszamegyünk az előző pontra.
- Ezt a folyamatot addig hajtjuk végre, amíg pontosan 1 sor lesz nem teljesen fekete, de ez a sor is feketíthető. Ekkor megállunk egy pillanatra, a tábla feketítéséhez majd feketítjük.
- Ebben a sorban legfeljebb $n+1$ fekete mező lehet, különben korábban már kiszíneztük volna. (Ha $n+2$ fekete mező lenne benne, akkor úgy színeztünk oszlopot, hogy tudtunk volna sort színezni, mivel nincs minden sorban legalább $n+1$ mező az elején.) Tehát legfeljebb $n+1$ oszlopot színezhettünk eddig ki. Továbbá feketíthető, tehát legalább $n+1$ fekete mező van benne, azaz ennek a sornak a befeketítése után az egész tábla fekete lesz.
- Tehát legfeljebb $2n+1+n+1 = 3n+2$ sor/oszlop színezésével feketíthető a tábla. Minden színezésnél legfeljebb n mezőt színezünk át, tehát legfeljebb $n\times(3n+2) = 3n^2+2n$ fehér mező lehetett az elején. Azaz legalább $(2n+1)^2 - 3n^2 - 2n = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ fekete mezőnek kellett lennie kezdetben.

3. megoldás: (indukció tábla méretére)

- A lépések során végerhajtott fehérítések elhagyhatóak, ha a tábla a végén fekete színű lesz. (Hiszen a fehérítés ellenére ugyanazon sorok feketítését végre tudjuk hajtani, a fehérítés nélkül is fekete lesz tehát a tábla.) Ha egy tábla feketíthető, akkor minden sort/oszlopot elég legfeljebb egyszer átszínezni.

- Legyenek M, N, A, B nemnegatív egész számok melyekre $M \geq A, N \geq B$. Egy $M \times N$-es táblázat néhány mezője fekete. Egy B-sorfeketítő lépésben kiválasztunk egy sort, ahol legalább B db mező fekete és az adott sor minden mezőjét feketére színezzük. Egy A-oszlopfeketítő lépésben kiválasztunk egy oszlopot, ahol legalább A mező fekete és az adott oszlop minden mezőjét feketére színezzük. Egy $M \times N$ táblázatot $(A; B)$- feketíthetőnek nevezzük, ha ilyen lépések egy alkalmasan választott véges sorozatával elérhető, hogy a táblázat összes mezője fekete legyen. Állítás: Ha egy táblázat $(A; B)$-feketíthető, akkor legalább AB fekete mezőt tartalmaz.
- Bizonyítás indukció $A + B$ szerint. $A + B = 0$ esetén igaz az állítás: $A = B = 0$, így $AB = 0$, minden táblázat legalább 0 fekete mezőt tartalmaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $A + B < K$ esetén és most legyen $A + B = K$ és tekintsünk egy $M \times N$-es $(A; B)$-feketíthető táblázatot. Ha $A = 0$ vagy $B = 0$, akkor az előzőekhez hasonlóan triviálisan igaz az állítás.
- Ha $A \neq 0, B \neq 0$: Tekintsünk egy lépéssorozatot ami feketévé színezi az összes mezőt és tekintsük az első lépését- Feltehetjük hogy ez egy A-oszlopfeketítés (táblát elforgathatjuk) és feltehetjük, hogy ez az utolsó oszlop feketítése (oszlopok egymáshoz viszonyított helyzete nem számít, felcserélhetőek). Ez azt jelenti, hogy az utolsó oszlopban legalább A fekete mező volt.
- A továbbiakban minden oszlopfeketítés a bal oldali $M(N-1)$-es résztáblázat egy A-oszlopfeketítésének, míg minden sorfeketítés ugyanezen résztáblázat egy $(B - 1)$-sorfeketítésének felel meg. Ezek szerint a bal oldali $M \times (N - 1)$-es résztáblázat $(A; B - 1)$-feketíthető, azaz legalább $A(B - 1)$ fekete mezőt tartalmaz. Az egésztáblázat tehát legalább AB fekete mezőt tartalmazott.
- Az $M = N = 2n + 1$, $A = B = n + 1$ esetből megkapjuk, hogy a legkisebb ilyen k legalább $(n + 1)^2$.

Pontlevonások, részpontok:

1 pont Egy megoldáson belül felsorolt pontok közül legalább 2-t leírt.

2 pont Egy megoldáson belül felsorolt pontok közül legalább 4-et leírt. (Tehát leírja a megoldást de kihagy egy gondolatot.)

-1 pont ha nem ad konstrukciót (de legalább 1 pontot elérne)