Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2015

2015/1. Legyen $n \geq 2$ egész és tekintsük az alábbi A_n halmazt

$$A_n = \{2^n - 2^k | k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n\}.$$

Határozzuk meg a legnagyobb pozitív egész számot, amely nem írható fel egy vagy több (nem feltétlenül különböző) A_n-beli elem összegeként.

2015/2. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalainak belső pontjai rendre K, L és M úgy, hogy az AK, BL és CM szakaszok egy ponton mennek át. Igazoljuk, hogy az ALM, BMK, CKL háromszögek közül kiválasztható kettő, amelyekbe beírt körök sugarainak összege legalább akkora, mint az ABC beírt körének sugara.

2015/3. Legyen a valós számok $x_1, x_2, ..., x_n$ sorozatának csúcsa

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_1 + ... + x_i|.$$

Adott n valós szám. Alajos és Ottó szeretnék olyan sorrendbe állítani őket, hogy a sorozat csúcsa minél kisebb legyen. Alajos, az alapos, végignézi az összes lehetőséget és megtalálja a legkisebb A csúcsot adó sorozatot. Ottó, a mohó, kiválasztja x_1-et úgy, hogy $|x_1|$ a lehető legkisebb legyen, majd kiválasztja x_2 -t a megmaradt számok közül úgy, hogy $|x_1 + x_2|$ a lehető legkisebb legyen és így tovább. Tehát az i-dik lépésben kiválasztja x_i-t a megmaradt számok közül úgy, hogy $|x_1 + x_2 + ... + x_i|$ a lehető legkisebb legyen. Minden lépésben, ha több szám is ugyanazt az értéket adja, Ottó véletlenszerűen választ közülük. Az így kapott sorozat csúcsa M. Határozzuk meg a legkisebb olyan c állandót, amelyre teljesül, hogy minden n-re és tetszőlegesen választott n valós számra $M < cA$.

2015/4. Az ABC háromszög AB és AC oldalaira kifele megrajzoltuk az ABD és ACE egyenlőszárú háromszögeket, ahol $DA = DB$ és $EA = EC$. Legyen a BC egyenesnek A-val átellenes oldalán az F pont olyan, amelyre

$$2FBC\angle = AEC\angle \quad \text{és} \quad 2FCB\angle = ADB\angle.$$

Legyen továbbá F merőleges vetülete BC-n T. Igazoljuk, hogy AF és DE merőlegesek, továbbá

$$\frac{AF}{DE} = \frac{2FT}{BC}.$$

2015/5. 2. Van $2m$ darab papírunk, mindegyikre az 1 számot írtuk. Ezután a következő módosítást végezzük: választunk két papírt, legyenek ezeken az a és b számok. Mindkettőről letöröljük a rajtuk levő számokat és helyettük felírjuk mindkettőre az $a+b$ számot. Igazoljuk, hogy $m2^{m-1}$ ilyen módosítás után a papírokon álló számok összege legalább $4m$.

2015/6. Legyen $n>1$ rögzített egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozat tagjai között végtelen sok páratlan szám van:

$$a_k = \left[\frac{n^k}{k}\right] \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$