

Kecskemét, 2017. április 21.

1. Feladat

Határozzuk meg azt a legkisebb valós C konstanst, amire teljesül az, hogy tetszőleges a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (nem feltétlenül különböző) pozitív valós számok esetén találhatóak páronként különböző i, j, k, l számok, amelyekkel

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leq C$$

teljesül.

2. Feladat

Legyen I a nem-egyenlőszárú ABC háromszög beírt körének a középpontja, I_A az A -val szemközti oldal hozzáírt körének a középpontja, I'_A I_A tükörképe a BC egyenesre, ℓ_A pedig az AI'_A egyenes tükörképe az AI egyenesre. Hasonlóan definiáljuk az I_B, I'_B pontokat és az ℓ_B egyenest. Legyen ℓ_A és ℓ_B metszéspontja P . Bizonyítsuk be, hogy P az OI egyenesen fekszik, ahol O jelöli az ABC háromszög körülírt körének a középpontját.

3. Feladat

Legyen n pozitív egész szám. Határozzuk meg a legkisebb pozitív egész k számot, amire teljesül a következő: meg lehet jelölni egy $2n \times 2n$ -es táblázat k mezőjét úgy, hogy pontosan egyféleképpen lehet a táblázatot 1×2 -es és 2×1 -es dominókkal (hézagmentesen és átfedés nélkül) lefedni úgy, hogy egyetlen dominó se tartalmazzon két megjelölt mezőt.

4. Feladat

Legyen n egy 6-hoz relatív prím pozitív egész szám. Egy szabályos n -szög csúcsait három színnel színezzük úgy, hogy mindegyik színű csúcsból páratlan sok van. Bizonyítsuk be, hogy a csúcsokból alkotott háromszögek között van olyan, amelyik egyenlőszárú és a három csúcsa három különböző színnel van színezve.

5. Feladat

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n számhoz van olyan $\frac{a}{b}$ tört, amelyikre a és b olyan egész számok, melyekre teljesül $0 < b \leq \sqrt{n} + 1$ és $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok pozitív egész n szám, amihez nincs olyan $\frac{a}{b}$ tört, amelyikre a és b olyan egész számok, melyekre teljesül $0 < b \leq \sqrt{n}$ és

$$\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}.$$

6. Feladat

Jelölje \mathbb{N} a pozitív egész számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt, amire teljesül az, hogy minden m, n pozitív egészre $f(m) + f(n) - mn$ nem-nulla és osztója $(mf(m) + nf(n))$ -nek.